Colegio Valentín Letelier
Asignatura Electivo de Matemática
Profesora Paloma Caballero

Guía de Aprendizaje

Unidad: 1 Subsector: Funciones Nivel: Tercero Medio
Objetivo de Aprendizaje OA 1. Utilizar diversas formas de representación acerca de la resultante de la composición de funciones y la existencia de la función inversa de una función dada. OA b. Resolver problemas que impliquen variar algunos parámetros en el modelo utilizado y observar cómo eso influye en los resultados obtenidos.
OA g. Elaborar representaciones, tanto en forma manual como digital, y justificar cómo una misma información puede ser utilizada según el tipo de representación.
Objetivo de la Guía: Asimilar la totalidad de los contenidos de funciones utilizando la operatoria correspondiente para resolver los ejercicios propuestos.
Nombre: ____ Curso: _________ Fecha: ___/___/_______

Instrucciones: (Leídas en silencio)
- ✓ Lee atentamente esta guía.
- ✓ Trabaja en forma individual.
- ✓ Pégala en tu cuaderno o archívala en tu carpeta.

FUNCIÓN INVERSA

Antonio estaba revisando noticias en Internet y se distrajo con el informe del tiempo. El pronóstico para ese día, en la ciudad de Nueva York, era de 91 ºF, la temperatura máxima y 68 ºF, la temperatura mínima.

- Si la función que relaciona las escalas Celsius (ºC) y Fahrenheit (ºF) está dada por la expresión $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$, en grados Fahrenheit, ¿cuáles son las temperaturas mínima y máxima pronosticadas, en grados Celsius?
- Las personas que viven en Nueva York, ¿deberán usar ropa abrigada ese día?, ¿por qué?
- ¿En qué países se utiliza la escala Fahrenheit de temperatura? Averigua.
- ¿Qué otras escalas de temperaturas conoces? Nómbralas.

En la situación inicial observaste que si tenemos una función $y = f(x)$ a veces necesitamos calcular el valor de la variable independiente x, la cual tenemos que despejar; por ejemplo, la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar corresponde a 212 °F. Si quisiéramos transformar esta medida a grados Celsius, podemos escribir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32$$

Luego, despejamos la x, es decir:

$212 = \frac{9}{5}x + 32$ .... • Restamos 32.

$180 = \frac{9}{5}x$ .... • Multiplicamos por $\frac{5}{9}$.

$100 = x$

Por lo tanto, el agua ebulle a 100 °C.

Podemos generalizar lo anterior considerando una función que relacione la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura en grados Fahrenheit. Para esto debemos expresar x en función de y (o $f(x)$), es decir, despejaremos la variable x de la expresión original:

$y = \frac{9}{5}x + 32$ .... • Restamos 32.

$y - 32 = \frac{9}{5}x$ .... • Multiplicamos por 5.

$5(y - 32) = 9x$ .... • Dividimos por 9.

$\frac{5}{9}(y - 32) = x$

Atención

Con frecuencia se representa la inversa de una función f mediante f^{-1}, esta notación no debe confundirse con un exponente. Es decir, $f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$ pues $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

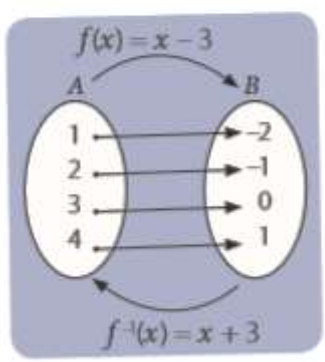
La expresión obtenida en el procedimiento anterior se conoce como la función inversa de f y se escribe como f^{-1}. En este caso:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si te fijas, escribimos la expresión anterior en términos de x. Luego, tenemos, por ejemplo, que:

$$f^{-1}(212) = \frac{5}{9}(212 - 32) = \frac{5}{9}(180) = 100$$

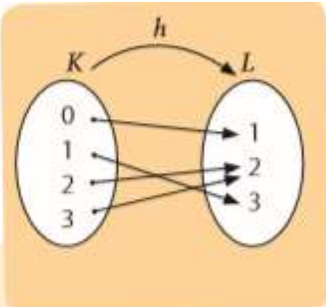
El resultado anterior es igual al que obtuvimos en la página anterior, es decir, que 212 °F equivalen a 100 °C.

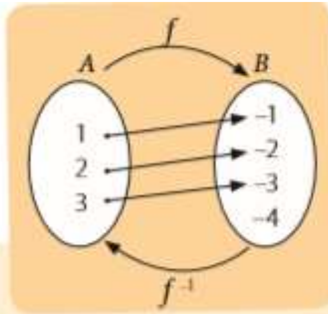


En el diagrama sagital de la derecha se representa una función f y su inversa f^{-1}. Si te fijas, el dominio de f equivale al recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1}.

Además, para que f^{-1} sea función, a cada elemento de B le corresponde una única preimagen, de manera que f debe ser una función biyectiva.

Por lo tanto, no todas las funciones tienen una inversa, es decir, solo tienen inversa aquellas funciones que son biyectivas. Observa:





En el diagrama anterior h no es inyectiva ya que $h(2) = h(3) = 2$. Luego, h^{-1} no es función pues un elemento de su dominio tiene dos imágenes (2 y 3).

En el diagrama anterior f no es sobreyectiva ya que el -4 no tiene preimagen. Luego, f^{-1} no es función pues no todos los elementos de su dominio tienen una imagen.

¿Lo entiendes?

Determina $(f^{-1} \circ f)(x)$ y verifica que f^{-1} es la inversa de f.

Por otra parte, si calculamos la composición $(f \circ f^{-1})(x)$, o bien, $(f^{-1} \circ f)(x)$, obtendremos la función lineal $f(x) = x$, de esta manera podemos determinar si cierta función es la inversa de otra; por ejemplo, más arriba concluimos que:

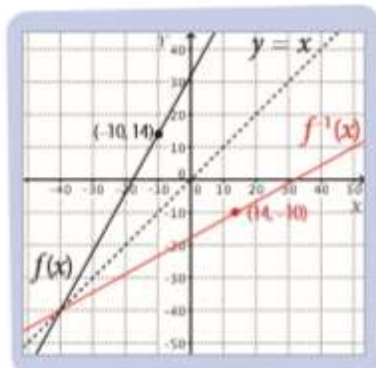
$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \qquad f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = \frac{45}{45}(x - 32) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

Como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, la función $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ es la inversa de $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$ (representada con las líneas punteadas). Esto ocurre para todas las funciones y sus inversas. En otras palabras, si f es una función biyectiva y f^{-1} es su función inversa, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la gráfica de la función $f(x) = x$.



Puede ver el link : https://www.youtube.com/watch?v=bdBX4_3WRWc para ver uh video explicativo de como obtener la inversa de una función

¿Cómo hacerlo?

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1}.

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

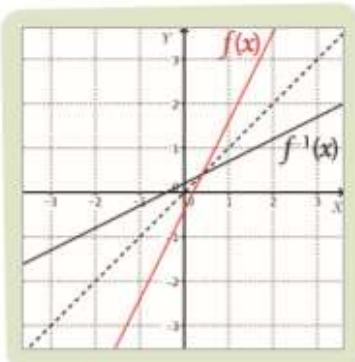
$$(f \circ f^{-1})(x) = (f\ (f^{-1}(x)) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$. Observa.

$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$ .... • Restamos $\frac{1}{5}$.

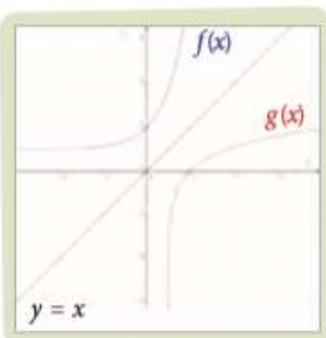
$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5}$ .... • Multiplicamos por 2.

$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$



Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1}. Si te fijas, las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.



¿Cómo hacerlo?

Construye la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = ln(x - 1)$. Luego, verifica que g es la inversa de f.

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de las funciones f y g. Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, de modo que podemos suponer que g es la inversa de f.

Para verificar lo anterior podemos calcular $(g \circ f)(x)$. Observa:

$$(g \circ f)(x) = g\,(f(x)) = ln((e^x + 1) - 1) = ln(e^x) = x$$

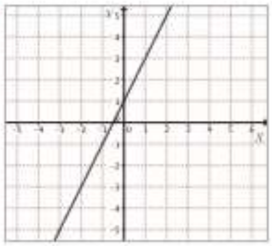
Luego, como $(g \circ f)(x) = x$, la función g es la inversa de f.

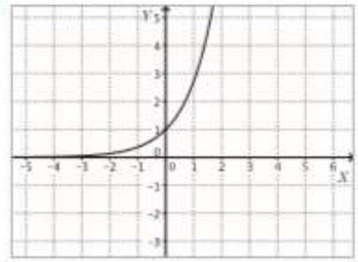
Tomo nota

- **Dada una función $f: A \longrightarrow B$ biyectiva, llamamos función inversa de f a la función $f^{-1}: B \longrightarrow A$, tal que para cualquier x del dominio de f se cumple que: Si $f(x) = b$, entonces $f^{-1}(b) = x$.**
- **Dada una función $f(x)$, para determinar la representación algebraica de $f^{-1}(x)$, su función inversa, se escribe la ecuación $(f \circ f^{-1})(x) = x$, aplicando $f(x)$ a la expresión $f^{-1}(x)$, y luego se resuelve la ecuación, considerando a $f^{-1}(x)$ como la incógnita.**
- **En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.**

Actividades

1. **Traza la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f.**

   a. 

   b. 

2. **Responde las siguientes preguntas.**
   a. ¿Qué condición debe cumplir una función para tener una función inversa?
   b. Si f es creciente, ¿es f^{-1} una función creciente?

3. **Determina si las siguientes funciones, definidas en los números reales, tienen inversa. En el caso de que la tengan, determina f^{-1}.**
   a. $f(x) = 3x + 4$
   b. $f(x) = 2x^3 - 1$
   c. $f(x) = x^2 - 4$
   d. $f(x) = log(x - 5)$
   e. $f(x) = 1 - e^x$
   f. $f(x) = x^6 - 4$

Desafío

Dada la función $f(x) = mx + n$, ¿cuál es el valor de $m \cdot p$, si p es la pendiente de la recta asociada a f^{-1}?

4. CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA ▸ **El precio de un automóvil está dado por la función $p(t) = 30\,000\,000 - 2\,000\,000t$, donde p corresponde al precio del automóvil en el año t.**
   a. Demuestra que p es una función biyectiva.
   b. Halla p^{-1} y determina su significado.

5. **Al colocar un objeto en el platillo de una balanza analógica, el puntero describe un arco de medida, en grados, directamente proporcional a la masa del cuerpo. Para 1 kg el puntero describe un arco de 36°.**
   a. Escribe una función que exprese el desplazamiento del puntero en función de la masa corporal x de un objeto, con $x < 10$.
   b. Escribe una función que exprese la masa, en kilogramos, de un objeto colocado en la balanza, en función del desplazamiento x del puntero, con $x < 360°$.
   c. ¿Cuál es la relación entre las funciones obtenidas en los puntos anteriores?

6. CONEXIÓN CON LA FÍSICA ▸ **La ley de enfriamiento de Newton permite determinar el momento de la muerte de una persona con la función $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)(0{,}97)^t$, donde T es la temperatura del individuo t horas después de su muerte. T_0 es la temperatura ambiente y T_1 la temperatura en el momento de su muerte.**
   a. Halla T^{-1} y explica su significado.
   b. Si $T_0 = 25$ °C, $T_1 = 37$ °C y $T = 31$ °C, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que murió la persona?