Colegio Valentín Letelier
La Serena

Subsector: Matemática
Profesora: Roxana Muñoz

Guía de Aprendizaje

Unidad: Números   Subsector: Matemática   Nivel: II Medio

Objetivo Aprendizaje: Realizar cálculos y estimaciones que involucren operaciones con números reales
- Utilizando la descomposición de raíces y las propiedades de las raíces.
- Combinando raíces con números racionales.
- Resolviendo problemas que involucren estas operaciones en contextos diversos.

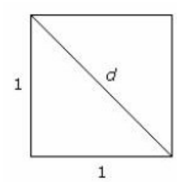
Objetivo de la Guía: Reforzar los contenidos estudiados hasta la fecha sobre números irracionales y la operatoria en el conjunto

Nombre: ____ Curso: _________ Fecha: ___/___/_______

<u>Números irracionales</u>

Los números irracionales surgen por la imposibilidad de resolver en Q ciertos problemas. Por ejemplo, si se quiere calcular la longitud de la diagonal de un cuadrado de lado 1, esto no es posible hacerlo en el conjunto de los números racionales, ya que por el Teorema de Pitágoras, llamando *d* a la longitud buscada (diagonal), se ha de cumplir que:

$$cateto^2 + cateto^2 = hipotenusa^2$$
$$1^2 + 1^2 = d^2$$
$$2 = d^2$$
$$d = \sqrt{2}$$



Donde, $d = \sqrt{2}$ no es un número racional puesto que no se puede expresar como una fracción, en otras palabras, la expresión decimal $\sqrt{2}$ tiene infinitas cifras en la parte decimal sin regularidad alguna.

El número irracional más conocido es π, que se define como la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro.

$$\pi = 3,141592653589...$$

Raíces cuadradas

En estricto rigor, raíz es una cantidad que se multiplica por sí misma una o más veces para presentarse como un número determinado. Encontrar o extraer la raíz es realizar la operación contraria o inversa de la potenciación, así como la suma es la operación inversa de la resta y viceversa, y la multiplicación es la operación contraria de la división y viceversa.

Potencia	Raíz
$x^n = a$ <———>	$\sqrt[n]{a} = x$

Ejemplo :

$8^2 = 64$ <—> $\sqrt[2]{64} = 8$

Cuando el índice de la raíz es 2 (raíz cuadrada), no se acostumbra por convención a colocarlo, se subentiende que es 2.

Para encontrar el valor de una raíz cuadrada se debe hacer la siguiente pregunta:

¿Qué número elevado a 2 (al cuadrado) da como resultado 64?

TABLA DE CUADRADOS Y RAÍCES CUADRADAS

CUADRADO	RAÍZ CUADRADA	CUADRADO	RAÍZ CUADRADA
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

La respuesta es 8, porque $8^2 = 64$

¿Qué número elevado a 2 da como resultado 100?

La respuesta es 10, porque $10^2 = 100$, entonces $\sqrt{100} = 10$

Relación de la raíz y la potencia
Existe una estrecha relación entre las potencias y las raíces. En efecto, toda raíz puede ser expresada como una potencia de exponente fraccionario.

$$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}\ ,\ m \neq 0$$

Ejemplos:

a) $\sqrt[3]{7} = 7^{\frac{1}{3}}$

b) $\sqrt[5]{x^2} = x^{\frac{2}{5}}$

c) $\sqrt[4]{3^3} \cdot \sqrt{3} = 3^{\frac{3}{4}} \cdot 3^{\frac{1}{2}} = 3^{\frac{5}{4}}$ Se aplican propiedades de las potencias, multiplicación de potencias de igual base: se mantiene la base y se suman los exponentes

De esta propiedad se pueden extraer ciertas conclusiones:
- El índice y el exponente del subradical son simplificables entre sí.

Ejemplo:

$$\sqrt[12]{a^8} = a^{\frac{8}{12}} = a^{\frac{2}{3}}\text{, es decir, } \sqrt[\cancel{12}^{3}]{a^{\cancel{8}_{2}}} = \sqrt[3]{a^2}$$

$$\sqrt[8]{3^6} = \sqrt[\cancel{8}^{4}]{3^{\cancel{6}_{3}}} = \sqrt[4]{3^3}$$

Propiedades de la raíces
Debido a que las raíces pueden convertirse a potencias de exponente fraccionario, cumplen con todas las propiedades de potencias a partir de las cuales se pueden deducir las siguientes propiedades de raíces:
1) *Multiplicación de raíces de igual índice:*

$$\sqrt[n]{a} \bullet \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$$

Se multiplican las bases y se conserva el índice.

2) *División de raíces de igual índice:*

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$$

Se dividen las bases y se conserva el índice.

3) *Raíz de raíz:*

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[nm]{a}$$

Para obtener raíz de raíz se multiplican los índices y se conserva la base.

4) *Raíz de una potencia cuyo exponente es igual al índice:*

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Exponente e índice se anulan entre sí, por lo tanto desaparece el radical y la base queda aislada.

5) *Ingreso de un factor dentro de una raíz:*

$$a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}$$

(con la restricción que a>0 si *n* es par)

Para introducir un factor dentro de una raíz se coloca el factor dentro del radical como potencia con exponente igual al índice y multiplicando a los demás factores.

6) *Anulación de la raíz*

Como ya sabes, **la raíz es la operación contraria a la potencia**.

Entonces si tienes un número o una variable elevada a un exponente que está dentro de una raíz con el mismo índice, la potencia con la raíz se anula:

$$\sqrt[n]{a^n} = a$$

Esta propiedad parece obvia, pero cuando forma parte de una expresión mucho más compleja, hay veces que se olvida.

Es muy útil para simplificar expresiones cuando trabajamos con variables:

$$\sqrt[5]{x^5} = x$$

El índice y el exponente se anulan y queda sólo la x

Cuando operas con números, esta propiedad la aplicas indirectamente al obtener el resultado de la raíz.

Por ejemplo, en esta raíz:

$$\sqrt[3]{8} = 2$$

El resultado es 2 porque 2 elevado al cubo son 8.

Si aplicamos esta propiedad y en vez de poner 8, lo ponemos como 2 elevado al cubo, vemos que los 3 del índice del exponente y del índice se anulan y queda sólo el 2, que es el resultado de la raíz.

$$\sqrt[3]{2^3} = 2$$

Las propiedades de las raíces cobran más sentido cuando se utilizan con algún fin, ya sea para simplificar una expresión o para realizar operaciones con raíces.

Racionalización de fracciones con radicales

Tratándose de radicales, el proceso de **racionalización** consiste en eliminar las raíces que se encuentran en el denominador de una fracción.

Dependiendo de las operaciones involucradas dentro de ese denominador pueden presentarse diversos casos:

a) caso en que el denominador contenga una raíz cuadrada, sin adiciones ni sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{8}{\sqrt{2}}$

Como regla general, amplificamos la fracción por el valor de este denominador, en este caso $\sqrt{2}$, de la siguiente manera:

$$\frac{8}{\sqrt{2}} = \frac{8 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} = \frac{\cancel{8}\sqrt{2}}{\cancel{2}} = 4\sqrt{2}$$

b) Caso en que el denominador contenga una raíz cuadrada, con adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{8}{2 - \sqrt{2}} =$

Igual que en el caso anterior, amplificamos la fracción, ahora por $2 + \sqrt{2}$, para formar en el denominador una suma por su diferencia (corresponde al **conjugado, que es la misma expresión pero con signo contrario),** con lo cual dejamos la expresión en:

$$\frac{8}{2 - \sqrt{2}} = \frac{8 \cdot (2 + \sqrt{2})}{(2 - \sqrt{2}) \cdot (2 + \sqrt{2})} = \frac{8(2 + \sqrt{2})}{4 + 2\sqrt{2} - 2\sqrt{2} - \sqrt[\cancel{2}]{2^{\cancel{2}}}} =$$

$$= \frac{8(2 + \sqrt{2})}{4 - 2} = \frac{\cancel{8}(2 + \sqrt{2})}{\cancel{2}} = 4 \cdot (2 + \sqrt{2}) = 8 + 4\sqrt{2}$$

c) Caso en que hay una raíz cúbica en el denominador, sin adiciones o sustracciones.

Ejemplo:

Racionalizar: $\frac{4}{\sqrt[3]{2}} =$

En este caso amplificamos la fracción por $\sqrt[3]{2^2}$, para dejar la expresión del siguiente modo:

$$\frac{4}{\sqrt[3]{2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{4 \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[\cancel{3}]{2^{\cancel{3}}}} = \frac{\cancel{4} \cdot \sqrt[3]{2^2}}{\cancel{2}} = 2\sqrt[3]{2^2} = 2\sqrt[3]{4}$$

EJERCICIOS

I) Transformar las siguientes potencias a raíces

1) $5^{\frac{3}{4}}$ 3) $9^{\frac{1}{2}}$ 5) $16^{\frac{3}{2}}$ 7) $p^{\frac{3}{8}}$

2) $3^{\frac{2}{5}}$ 4) $32^{-\frac{2}{5}}$ 6) $8^{-\frac{2}{3}}$ 8) $(2a)^{\frac{2}{3}}$

II) transforma las siguientes raíces a potencias

1) $\sqrt[3]{3^2}$ 2) $\sqrt[4]{2^3}$ 3) $\sqrt[5]{8}$ 4) $\sqrt{27}$ 5) $\sqrt[6]{4}$ 6) $\sqrt[7]{7}$

III) Resuelva aplicando el concepto de raíz.

1) $\sqrt{\frac{4}{9}} =$ **2)** $\sqrt{\frac{1}{9}} \bullet \sqrt{\frac{81}{4}} \bullet \sqrt{\frac{49}{36}} =$ **3)** $\sqrt{0{,}25} + \sqrt[3]{0{,}125} =$ **4)** $\sqrt[4]{16} \bullet \left(\sqrt[3]{\frac{x^3}{7}}\right) =$

5) $\sqrt[4]{\frac{3x^4}{16}} =$ **6)** $\sqrt[3]{-0{,}027} =$ **7)** $\sqrt{\frac{400}{289}} =$ **8)** $\sqrt{\frac{16}{81}} - 3\sqrt{\frac{25}{9}} + \sqrt{\frac{1}{9}} =$

9) $\left(\sqrt{\frac{1}{4}} - \sqrt{\frac{1}{9}}\right) \div \sqrt{\frac{4}{9}} =$ **10)** $\sqrt{\frac{25}{4}} + 8\sqrt{\frac{16}{8}} - \sqrt{\frac{1}{36}} =$

IV) Multiplique las siguientes raíces

1) $\sqrt{3} \bullet \sqrt{5} \bullet \sqrt{2} =$ 2) $\sqrt{2}\left(1 + \sqrt{7}\right) =$ 3) $\sqrt[3]{4} \bullet \sqrt[3]{2} =$ 4) $\sqrt{\frac{2a}{3}} \bullet \sqrt{\frac{3}{2a}} =$

5) $3\sqrt{\frac{a^x}{2}} \bullet 2\sqrt{\frac{a^{x-3}}{5}} =$ 6) $5x\sqrt{y} \bullet 3y\sqrt{2x} =$ 7) $\sqrt{1+\sqrt{3}} \bullet \sqrt{1+\sqrt{3}} =$

8) $\left(3\sqrt{2} + \sqrt{5}\right)^2 =$ 9) $\sqrt{\frac{1}{1-x}} \bullet \sqrt{\frac{1-x}{9}} =$ 10) $\frac{\sqrt{5}}{2}\left(\sqrt{2} + \frac{\sqrt{5}}{3}\right) =$

V) Divida las siguientes raíces

1) $\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}} =$ 2) $\frac{\sqrt{a^{2x-1}}}{\sqrt{a^{x-2}}} =$ 3) $5a^2\sqrt{50} \div 3a\sqrt{2} =$ 4) $\frac{\sqrt{8} + \sqrt{18}}{\sqrt{2}} =$

5) $\frac{3\sqrt{20}}{\sqrt{5}} - 2\sqrt{2} \bullet \sqrt{8} =$ 6) $\frac{\sqrt{a^{3x}}}{\sqrt{a^{x-1}}} =$ 7) $\left(2\sqrt{18} - 4\sqrt{8}\right) \div 2\sqrt{2} =$

8) $\left(25\sqrt[3]{x^2} - 10\sqrt[3]{x^4}\right) \div 5\sqrt[3]{x} =$ 9) $5a^2\sqrt{50} \div 3a\sqrt{2} =$ 10) $3a^2\sqrt[3]{a^{5x}} \div a^2\sqrt[3]{a^{2x}} =$

VI) Calcule la raíz de la raíz

1) $\sqrt{\sqrt[3]{4}} =$ 2) $\sqrt{2\sqrt{2}} =$ 3) $\sqrt[3]{a\sqrt{a\sqrt{a}}} =$ 4) $\sqrt{\sqrt{\sqrt{\sqrt{5}}}} =$ 5) $\sqrt{2\sqrt{6\sqrt{x}}} =$

6) $\sqrt[n]{\sqrt{\sqrt[3]{a}}} =$ 7) $\sqrt[3]{\sqrt{\sqrt[7]{5}}} =$ 8) $3\sqrt{2\sqrt{4x}} =$ 9) $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}\sqrt{\frac{3}{5}}} =$ 10) $ax\sqrt{x\sqrt{x^3}} =$

VII) Racionalizar las siguientes expresiones

1) $\frac{5}{\sqrt{2}}$

2) $\frac{3}{\sqrt{5}}$

3) $\frac{6}{\sqrt{6}}$

4) $\frac{9}{\sqrt{3}}$

5) $\frac{5\sqrt{2}}{4\sqrt{3}}$

6) $\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$

7) $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

8) $\frac{p-\sqrt{q}}{p\sqrt{q}}$

9) $\frac{5}{4-\sqrt{3}}$

10) $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-2}$

11) $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$

12) $\frac{\sqrt{a+1}-1}{\sqrt{a+1}+1}$