Colegio Valentín Letelier
La Serena

Subsector: Matemática
Profesora: Roxana Muñoz

Guía de Aprendizaje

Unidad: Números Subsector: Matemática Nivel: I Medio
Objetivo Aprendizaje: Mostrar que comprenden las potencias de base racional y exponente entero:
• Transfiriendo propiedades de la multiplicación y división de potencias a los ámbitos numéricos correspondientes.
• Relacionándolas con el crecimiento y decrecimiento de cantidades.
• Resolviendo problemas de la vida diaria y otras asignaturas.
Objetivo de la Guía: Modelar situaciones cotidianas y de las ciencias utilizando potencias.
Relacionar potencias con el crecimiento y decrecimiento de cantidades.
Resolver ejercicios PSU sobre el tema.

Nombre: ____Curso: _________Fecha: ___/___/_______

Crecimiento y decrecimiento exponencial.

Analicemos las siguientes situaciones:

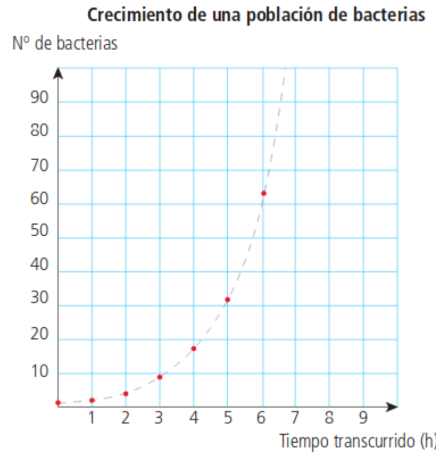
a) La Hidra de Lerna es un personaje mitológico que aparece en algunas historias, como la de las 12 pruebas de Hércules. La Hidra era un monstruo con 1 cabeza, pero si se le cortaba, le nacían 2 cabezas en su lugar. Si un héroe intentaba vencerla cortándole todas sus cabezas cada día, ¿cuántas cabezas tendría la Hidra el tercer día? ¿y al cabo de 11 días intentando vencerla?
Vamos a resolver la primera pregunta de este problema:
El primer día, al cortarle una cabeza, el monstruo tenía 2 cabezas
El segundo día, al cortarle todas las cabezas, nacieron el doble: 2 x 2 = 2^2 = 4 cabezas.
El tercer día, volvieron a nacer el doble de cabezas: 2 x 2 x 2 = 2^3 = 8 cabezas
Para resolver la segunda pregunta, tenemos que hacer el mismo procedimiento.
Para saber cuántas cabezas tendría el monstruo en 11 días, debemos hacer la siguiente operación:
2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 x 2 = 2^{11} = 2048 cabezas

b) Un grupo de estudiantes está analizando la descomposición de una hortaliza. Ellos consideran que la infección es extensa, es decir, la hortaliza no puede ser consumida cuando tiene 1024 o más bacterias por milímetro cuadrado (mm^2). Además, observaron que las bacterias que producen la descomposición de la hortaliza se duplican cada una hora.
La situación anterior se puede resumir en la tabla

Tiempo transcurrido	Número de bacterias	Número de bacterias como potencia
0	1	2^0
1 hora	2	2^1
2 horas	4	2^2
3 horas	8	2^3
4 horas	16	2^4
5 horas	32	2^5
6 horas	64	2^6
7 horas	128	2^7
8 horas	256	2^8
9 horas	512	2^9
10 horas	1024	2^{10}

Si observamos la tabla, hay 64 bacterias por mm^2 en la hortaliza transcurridas 6 horas, es decir, si comenzaron el estudio a las 8:30 horas, dicha cantidad estará presente a las 14:30 horas.
Por otra parte, la hortaliza no podrá ser consumida transcurridas 10 horas, es decir, a las 18:30 horas la infección será considerada extensa por los estudiantes.
Como las bacterias se duplican cada una hora, cada vez se multiplica por dos. Entonces, si queremos expresar como potencia, la base será 2 y el exponente corresponde a las horas transcurridas.
Además, observamos dos variables, una dependiente de la otra, ya que el número de bacterias depende de las horas transcurridas; dicho de otro modo, a medida que el tiempo transcurre, la cantidad de bacterias aumenta.
Para analizar la relación entre las variables, observa el gráfico:

Este tipo de relación entre las variables se llama **crecimiento exponencial,** o se dice que crecen exponencialmente. Para que se trate de un problema de crecimiento, **la base de la potencia debe ser mayor que 1.**



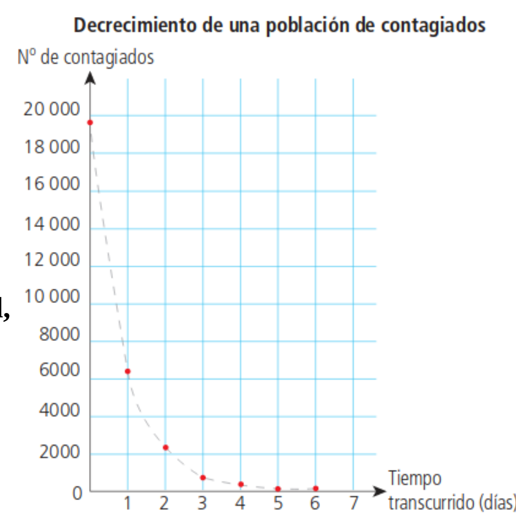
c) Científicos de diversos países se han reunido con el fin inventar una vacuna para combatir un virus respiratorio. Esperan que, al momento de vacunar a la población, la cantidad de contagiados disminuya a un tercio de la población cada día.
Suponiendo que se vacunara a la población e inicialmente hubiera 19 683 contagiados, la información se resume en la siguiente tabla:

Días transcurridos	Factor de decrecimiento	Cantidad de contagiados
0	$\left(\frac{1}{3}\right)^0$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 19\,683$
1	$\left(\frac{1}{3}\right)^1$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 = 6561$
2	$\left(\frac{1}{3}\right)^2$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 2187$
3	$\left(\frac{1}{3}\right)^3$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = 729$
4	$\left(\frac{1}{3}\right)^4$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 = 243$
5	$\left(\frac{1}{3}\right)^5$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^5 = 81$
6	$\left(\frac{1}{3}\right)^6$	$19\,683 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^6 = 27$

Si observamos la tabla, en tres días los contagiados disminuirían en $\left(\frac{1}{3}\right)^3$ de su población y en 6 días $\left(\frac{1}{3}\right)^6$

Si inicialmente hubiera 19 683 contagiados al momento de vacunar a la población, la cantidad de contagiados del segundo día sería 2187; del quinto día, 81 contagiados y el noveno día se contagiaría solo una persona.

En esta situación, observamos la relación entre dos variables y, al igual que en el crecimiento exponencial, una depende de la otra. En este caso, la cantidad de contagiados depende de los días transcurridos, pues, a medida que pasan los días, la cantidad de contagiados disminuye. Para analizar la relación entre las variables, observa el gráfico:



Este tipo de relación entre las variables se llama **decrecimiento exponencial,** o se dice que decrecen exponencialmente, **en ellas una potencia con base mayor que 0 y menor que 1.**

Conceptos:
Cuando se modela una situación de crecimiento exponencial, la base de la potencia es mayor que 1. Por otra parte, cuando la base de la potencia es menor que 1 y mayor que cero, se está modelando un decrecimiento exponencial

Te recomiendo revisar el texto del matemáticas, en las páginas 56 y 57 encontraras materia y ejemplos (en las páginas 58 y 59 ejercicios, pero solo si quieres practicar)
Deben resolver las paginas 20 y 21 del cuadernillo de ejercicios.

Crecimiento y decrecimiento exponencial

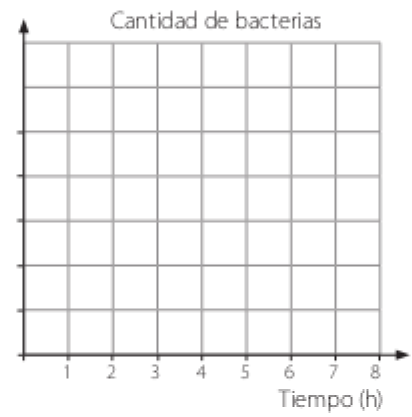
1. Biología La cantidad de bacterias que hay en un cultivo está dada por $B(t) = 2 \cdot 3^t$, en donde el tiempo t se mide en horas y $B(t)$ en miles.

a. ¿Cuál es el número inicial de bacterias? ______

b. ¿Cuál es el número después de 4 horas? ______

c. Completa la tabla y luego completa el gráfico, graduando el eje Y según sea necesario.

Tiempo (h)	Bacterias (miles)
3	
5	
6	
7	
8	



2. Química Si 10 gramos de sal se añaden a una cantidad de agua, la cantidad $k(t)$ de sal que no se disuelve después de t minutos está dada por $k(t) = 10 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^t$.

a. ¿Cuál es la cantidad de sal sin disolver en el agua 3 minutos después?

______

b. Después de añadir la sal al agua, ¿cuándo quedan solo 5 g sin disolver?

______

3. Para predecir el número de alumnos de un colegio que tiene planes de expansión limitada, el modelo usado es: $P(t) = 800 \cdot (0,7)^t$, donde t es el número de años después de abierto el colegio.

a. ¿Qué cantidad de alumnos había cuando abrió el colegio?

______

b. Después de 2 años de funcionamiento, ¿cuántos alumnos tiene?

______

4. Física En una fábrica, se estudió el rebote de una pelota y se concluyó que la altura del rebote decrecía según potencias de 0,9, es decir, si se deja caer de 1 metro de altura, el primer rebote medía 0,9 m de alto, el segundo medía $(0,9)^2$ m, y así sucesivamente. Responde.

a. Calcula la medida de la altura que alcanzó la pelota en el tercer rebote.

____

b. ¿Cuántos rebotes debe dar la pelota para que la altura que alcanza sea menor que 0,5 m?

____

c. Calcula la altura, en centímetros, que alcanza la pelota en el décimo rebote.

____

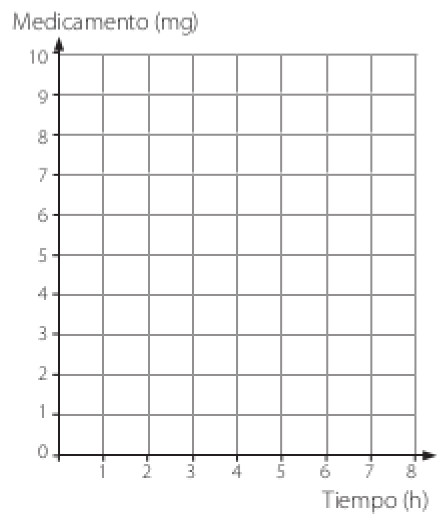
5. Medicina Un medicamento se elimina del organismo a través de la orina. La dosis inicial es de 10 mg y la cantidad en el cuerpo t horas después está dada por $A(t) = 10 \cdot 0{,}8^t$. Para que el fármaco haga efecto debe haber por lo menos 2 mg en el cuerpo.

a. ¿Cuál es la cantidad del fármaco restante en el organismo 2 horas después de la ingestión inicial?

____

b. Completa la tabla y luego completa el gráfico correspondiente.

Tiempo (h)	Medicamento (mg)
3	
4	
5	
6	
7	



c. Después de la ingestión inicial, ¿cuándo quedan menos de 2 mg?

____

POTENCIAS: Selección multiple: marque la alternativa correcta

1. ¿Cuál es el valor de $\frac{4^x}{2^{2x}}$

A) $\frac{4}{x}$
B) 1
C) 4x
D) $\frac{1}{2}$
E) 0

2.La forma más simple de : $\frac{2^{2x-1} \cdot 2^{2x+1}}{4^{2x}}$ es :

A) 4^{2x}
B) 1
C) 4x
D) $\frac{1}{2}$
E) 0

3. La cuarta potencia del doble del cubo de cinco se escribe simbólicamente como:
A) $4 \bullet 2 \bullet 5^3$
B) $4 \bullet (2 \bullet 5)^3$
C) $4 \bullet (5^3)^4$
D) $(2 \bullet 5^3)^4$
E) $(2^3 \bullet 5^3)^4$

4) El valor de $1^0 + 2^1 + 3^2$ es:
A) $3 \bullet 4$
B) 6^2
C) 5^3
D) 120
E) 6

5) El valor de la expresión $(-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^0$ es:
A) $(-2)^{10}$
B) 17
C) 11
D) 7
E) Ninguna de las anteriores

6) Si x = $-\frac{1}{3}$, ordene de menor a mayor x, x^2, x^3, x^4.

A) x^4, x^3, x^2, x
B) x, x^2, x^3, x^4
C) x, x^3, x^2, x^4
D) x^3, x, x^4, x^2
E) x, x^3, x^4, x^2

7) ¿Cuál es el valor de $3^0 \cdot (2^0 + 5^0) + (8^0 - 3^0) \cdot 5 - 4 \cdot 3^0$?
A) –6
B) 2
C) – 1
D) –2
E) Ninguna de las anteriores

8) Si N =1, entonces $\frac{a^{N+1}}{a^N \bullet a} =$

A) a

B) $a^{\frac{N-1}{N}}$

C) a^2

D) a^{2N+2}

E) a^0

9) $(-2)^3 + (-3)^2$ es equivalente a:

A) $2^3 - 3^2$

B) $3^2 + 2^3$

C) $-2^3 + 3^2$

D) $-3^2 - 2^3$

E) $-3^2 + 2^{-3}$

10) ¿Cuál es la cifra de las unidades de 3^{60}?

A) 0

B) 1

C) 3

D) 7

E) 9

11) El número más grande que se puede escribir utilizando exactamente tres veces la cifra 3, sin usar signos de operación, es:

A) 333

B) 33^3

C) 3^{33}

D) $(3^3)^3$

E) $3^{(3^3)}$

12) La potencia 9^6 tiene el mismo valor que la(s) potencia(s):

I) 3^{12} II) 81^3 III) 729^2

A) Sólo I y II

B) Sólo II y III

C) Sólo I y III

D) I, II y III

E) Ninguna de ellas

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
B	B	D	A	C	E	D	E	C	B	C	D

Recuerda que cualquier duda pueden contactarme rmunoz@cvl.cl

Cuídense mucho.