



Guía de Aprendizaje

Unidad: Álgebra

Subsector: Matemática

Nivel: IV Medio

Objetivo Aprendizaje: Modelar situaciones o fenómenos de las ciencias naturales mediante la función potencia

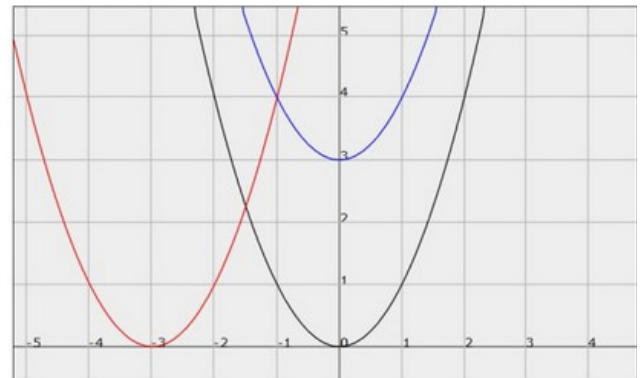
$$f(x) = a \cdot x^z \text{ con } |z| \leq 3$$

Objetivo de la Guía: Modelar situaciones o fenómenos naturales utilizando funciones potencia. Analizar variaciones en la gráfica de la función potencia. Desarrollar habilidades para resolver preguntas tipo PSU sobre el tema.

Nombre: _____ **Curso:** _____ **Fecha:** / /

Traslaciones de la función potencia

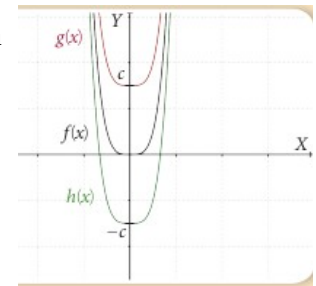
La gráfica de una función se puede trasladar (arriba, abajo, izquierda, derecha) en el plano cartesiano cambiando parámetros en su representación algebraica, por ejemplo tenemos $f(x) = x^2$ (parábola que se encuentra en el origen, de color negro) se puede cambiar generando las funciones $f(x) = (x+3)^2$ (trasladada hacia la izquierda, de color rojo) y $f(x) = x^2+3$ (trasladada hacia arriba, de color azul) funciones que tienen exactamente la misma gráfica pero se ubican en distintas parte del plano.



Si realizamos una **traslación vertical** de una función, la gráfica se moverá de un punto a otro punto determinado en el sentido del eje “y”, es decir, hacia arriba o hacia abajo, según $f(x) = ax^n + c$

La gráfica de $g(x) = ax^n + c$ se traslada en c unidades hacia arriba con respecto a $f(x)$.

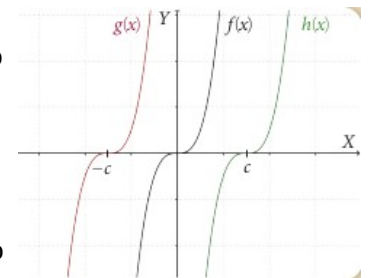
La gráfica de $h(x) = ax^n - c$ se traslada en c unidades hacia abajo con respecto a $f(x)$.



Si realizamos una **traslación horizontal** de una función, la gráfica se moverá de un punto a otro punto determinado en el sentido del eje “x”, es decir, hacia la derecha o hacia la izquierda, según $f(x) = a(x+c)^n$

La gráfica de $g(x) = a(x+c)^n$ se traslada en c unidades hacia la izquierda con respecto a $f(x)$.

La gráfica de $h(x) = a(x-c)^n$ se traslada en c unidades hacia la derecha con respecto a $f(x)$.



Es importante destacar que las funciones $g(x) = a(x+c)^n$ y $h(x) = a(x-c)^n$, **no son funciones potencia**, ya que no son de la forma $f(x) = ax^n$, ambas **son funciones polinomiales**.

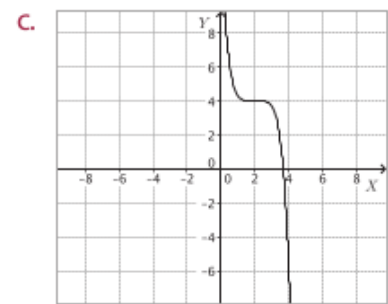
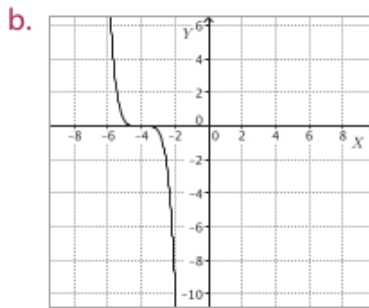
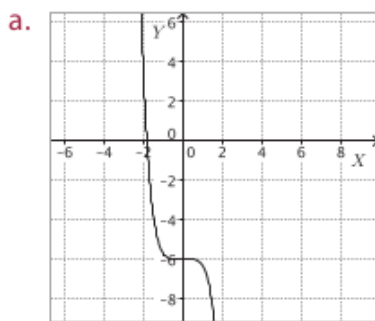
EJERCICIOS

Realiza las siguientes actividades

A partir de la gráfica de la función $g(x) = x^5$, dibuja la gráfica de las siguientes funciones.

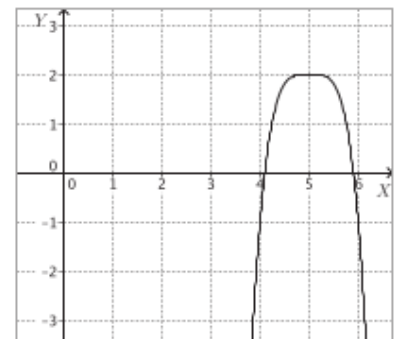
- a. $f(x) = -x^5$
- b. $h(x) = x^5 + 1$
- c. $h(x) = (x - 2)^5$
- d. $q(x) = (x + 1)^5 - 2$

Determina en cada caso la función graficada, considerando que todas son traslaciones de la función $f(x) = -0,3x^5$.



A partir de la gráfica de la función $f(x) = a(x + b)^n + c$ que se muestra en la figura, determina si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifica las falsas.

- a. a es un número real menor que 0.
- b. b es un número real positivo.
- c. n es un número natural par.
- d. c es un número real positivo.
- e. f es una función potencia.
- f. La gráfica de f es una parábola.
- g. El vértice de f es el punto $(5, 2)$.



Aplicaciones de la función potencia

Podemos usar funciones potencia para modelar situaciones en las que aparecen progresiones geométricas, como por ejemplo, divisiones celulares y reproducción de bacterias. modelarse con la función potencia $f(x) = ax^{n-1}$, donde a es el primer valor o cantidad inicial. Una progresión geométrica es una secuencia numérica en la cual cada término, excepto el primero, es igual al anterior multiplicado por una cantidad constante llamada razón.

La función potencia y sus traslaciones también se pueden aplicar en situaciones financieras; por ejemplo, cuando una persona deposita dinero en un banco durante un cierto tiempo el banco paga intereses. Una de las opciones es depositar el dinero definiendo una tasa de interés compuesto, durante un periodo de tiempo determinado.

El interés compuesto lo calculamos por medio de la expresión:

$$f(x) = a \cdot (1 + x)^t$$

donde $f(x)$ es el capital final obtenido al invertir un capital inicial a con una tasa de interés compuesto anual x , durante un periodo de tiempo t , en años.

El interés compuesto fue estudiado en segundo medio, en este caso solo utilizaremos la fórmula como una aplicación de la función potencia, al igual que las progresiones geométricas.

Ejemplos:

a. Si se invierten \$ 42 000 a una tasa de interés compuesto del 2 % anual durante 10 años, ¿cuál será el capital final? Y si la tasa de interés fuera del 4 %, ¿cuál sería el capital final?

En este caso solo debemos aplicar la formula para interés compuesto $f(x) = a \cdot (1 + x)^t$ en cada caso:

$$a = 42.000$$

$$x = 2\% = 0,02 \text{ y } 4\% = 0,04$$

$$t = 10$$

$$f(2\%) = 42.000 \cdot (1 + 0,02)^{10} = 51\,197,7$$

$$f(4\%) = 42.000 \cdot (1 + 0,04)^{10} = 62\,170,2$$

b. Un tipo de bacteria se reproduce al triple cada hora que pasa. Si se hace un cultivo en el que inicialmente hay 500 bacterias, ¿cuántas habrá al cabo de ocho horas?

En este caso usamos la formula para una progresión geométrica $f(x) = ax^{n-1}$, pero analicemos el desarrollo

Si te fijas, el dato que nos entrega la información de la hora 8 es el noveno en el desarrollo, por lo tanto:

$$f(9) = 500 \cdot 3^8$$

(si estudias con el libro, la expresión para una progresión geométrica es $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, estas expresiones son equivalentes $f(x) = a_n =$ termino enesimo; $a = a_1 =$ primer termino o cantidad inicial; $r = x =$ razón)

Aclaro esto, por que se tiende a cometer errores como calcular $f(8) = 500 \cdot 3^7$, ¿por qué? Por que en la formula en el exponente tengo $n-1$ y como quiero saber que pasa a las 8 horas, $8-1 = 7$. ESTO ESTA MAL.

Horas	Cantidad de bacterias
0 (inicio del experimento)	$500 \times 3^0 = 500$
1	$500 \times 3^1 = 1500$
2	$500 \times 3^2 = 4500$
3	$500 \times 3^3 = 13\,500$
4	$500 \times 3^4 = 40\,500$
5	$500 \times 3^5 = 121\,500$
6	$500 \times 3^6 = 364\,500$
7	$500 \times 3^7 = 1\,093\,500$
8	$500 \times 3^8 = 3\,280\,500$

Entonces, $f(9) = 500 \cdot 3^8 = 3.280.500$, al cabo de 8 horas habrán 3.280.500 bacterias.

c. Dos progresiones geométricas parten con el número 6. Si la razón de una de ellas es 9 y la razón de la otra es 6, ¿cuál es la suma entre los términos que ocupan la posición 10 en cada progresión?

En esta caso no es necesario tener en consideración lo anterior. De todas formas lo vamos a desarrollar y aplicar formula, obviamente, no es necesario desarrollar cada vez si sabes la formula.

1°: primer número: 6

razón: 9

$$6 \cdot 9^0 = 6$$

$$6 \cdot 9^1 = 54$$

$$6 \cdot 9^2 = 486$$

$$6 \cdot 9^3 = 4\,374$$

$$6 \cdot 9^4 = 39\,366$$

$$6 \cdot 9^5 = 354\,294$$

$$6 \cdot 9^6 = 3\,188\,646$$

$$6 \cdot 9^7 = 28\,697\,814$$

$$6 \cdot 9^8 = 225\,828\,036$$

$$6 \cdot 9^9 = 62\,324\,522\,934$$

$$\text{podimos no hacer nada de eso aplicando la fórmula } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_{10} = 6 \cdot 9^{10-1} = 6 \cdot 9^9 = 62\,324\,522\,934$$

2°: primer número: 6

razón: 6

$$\text{aplicando fórmula } a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$$

$$a_{10} = 6 \cdot 6^{10-1} = 6 \cdot 6^9 = 60\,466\,176$$

EJERCICIOS:

I. Resuelve los siguientes problemas.

1. Dos progresiones aritméticas parten con el número 4. Si la diferencia de una de ellas es 7 y la de la otra es 12, ¿cuál es el producto entre los términos que ocupan la posición 9 en cada una?
2. Un tipo de bacteria se reproduce al doble cada hora que pasa. Otro tipo de bacteria se triplica por cada hora transcurrida. Si se hace un cultivo en el que inicialmente hay 1 000 bacterias de cada tipo, ¿cuántas habrá al cabo de cinco horas?
3. Jorge y Paula depositaron cada uno \$ 85 000 en sus cuentas bancarias. Jorge lo hizo al 4 % anual, por 5 años; y Paula, al 7 % anual por el mismo periodo de tiempo. Al retirar el dinero, ¿cuánto dinero más tiene Paula que Jorge?
4. ¿Cuál es el término vigésimo de la siguiente progresión geométrica 2, 6, 18, 54, 162, 486, ...
5. Sergio y Alicia depositaron cada uno \$ 62 000 en sus cuentas bancarias. Sergio lo hizo al 6 % anual, por 4 años; y Alicia, al 8 % anual por el mismo periodo de tiempo. Al retirar el dinero, ¿cuánto dinero más tiene Alicia que Sergio?

II. Selección múltiple: marca la alternativa correcta

1. ¿Cuál(es) de las siguientes funciones corresponde(n) a función(es) potencia?

$$I. f(x) = 3^2$$

$$II. f(x) = (\sqrt{2})^x$$

$$III. f(x) = x^3$$

- A) Sólo I
- B) Sólo II
- C) Sólo III
- D) Sólo I y II
- E) Sólo I y III

2. La función $f(x) = x^3 - 4$ se traslada hacia:

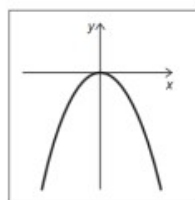
- A) La izquierda
- B) La derecha
- C) Abajo
- D) Arriba
- E) No se traslada

3. En toda función potencia $f(x) = ax^n$, n pertenece al conjunto de:

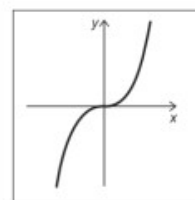
- A) Números enteros negativos
- B) Números naturales distintos de 1
- C) Números racionales
- D) Números reales
- E) Números enteros positivos

4. Si $a < 0$ y n es un número natural e impar, entonces ¿Cuál de los siguientes gráficos podría corresponder a $f(x) = ax^n$?

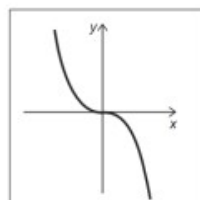
A)



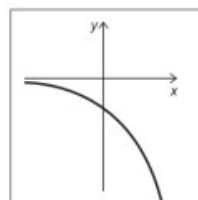
B)



C)



D)



E)

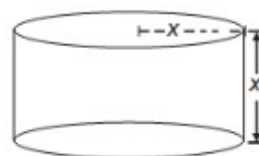
Ninguna de las anteriores

5. ¿Cuál de las siguientes funciones potencia está trasladada verticalmente hacia arriba?

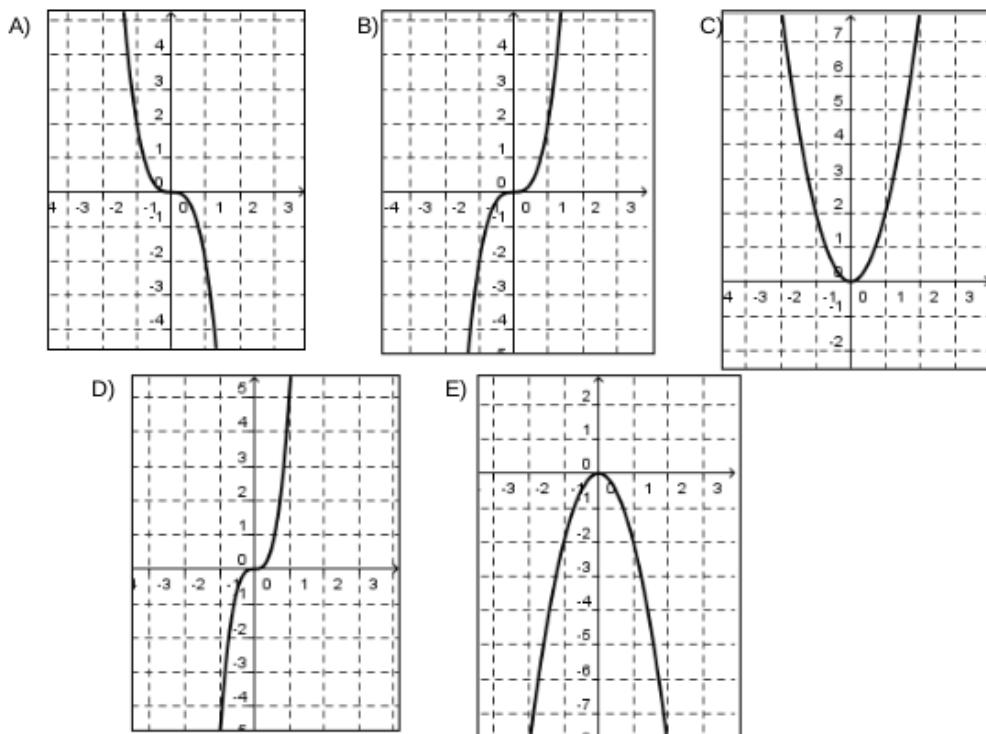
- A) $f(x) = x^3 - 3$
- B) $f(x) = x^2 - 1$
- C) $f(x) = 5x^2$
- D) $f(x) = (x - 4)^4$
- E) $f(x) = (x + 2)^5$

6. La función $V(x) = 3x^3$ permite calcular el volumen aproximado (V) de un cilindro, como el de la figura. Utilizando esta fórmula, ¿cuál debiera ser el valor de x para que el cilindro tenga 1m^3 de volumen aproximado?

- A) $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$
- B) 3 m
- C) 1 m
- D) $\frac{1}{3}$
- E) $\sqrt[3]{3}$

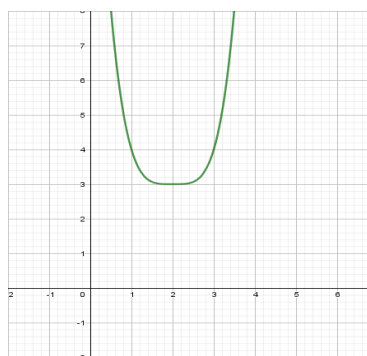


7. ¿Cuál de los siguientes gráficos corresponden a la función $f(x) = 2x^3$?



8. ¿A qué función corresponde la siguiente gráfica?

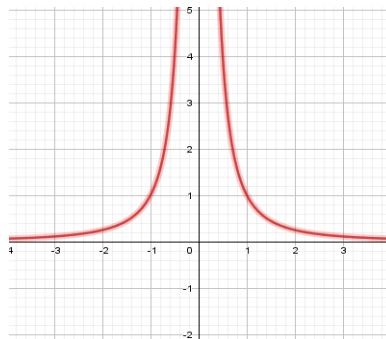
- a) $f(x) = (x + 2)^4 + 3$
- b) $f(x) = (x + 2)^5 + 3$
- c) $f(x) = (x - 2)^4 + 3$
- d) $f(x) = (x - 2)^5 + 3$
- e) $f(x) = (x + 2)^4 - 3$



9. Respecto de la función $f(x) = ax^n$, que se muestra en la figura, ¿cuál de las siguientes afirmaciones son correctas?

- I. $a > 0$
- II. n es un impar negativo
- III. el eje x es una asíntota de la función

- a) Solo I
- b) Solo II
- c) Solo I y III
- d) Solo II y III
- e) I, II y III



1	2	3	4	5	6	7	8	9
C	C	B	C	B	A	B	C	C

Cualquier duda me puedes consultar al correo rmunoz@cvi.cl o +56977296805
 Cuídense mucho