



Colegio Valentín Letelier
Asignatura Electivo de Matemáticas
Profesor Paloma Caballero

Guía de Aprendizaje

Unidad: 1 Subsector: Procesos Infinitos Nivel: Cuarto Medio

Objetivo de Aprendizaje: 02 Reconocen que una suma se puede representar en forma compacta por medio de la notación de sumatoria. Conocen y aplican propiedades de ésta y calculan las sumas de algunas series geométricas y telescópicas.

Objetivo de la Guía: Calcular sumatorias utilizando la operatoria correspondiente para resolver los ejercicios propuestos.

Nombre: _____ Curso: _____ Fecha:
___/___/_____

Instrucciones: (Leídas en silencio)

- ✓ Lee atentamente esta guía.
- ✓ Trabaja en forma individual.
- ✓ Pégalas en tu cuaderno o archívalas en tu carpeta.

Sumatorias

A menudo resulta difícil trabajar con todos los elementos de una determinada sucesión, considerándolos como sumandos.

Para facilitar este trabajo se ha convenido representar la adición de los términos en forma abreviada, mediante el signo Σ (sigma), acompañado de la fórmula o término general que define a la sucesión y del rango de valores que tomará la variable considerada en esa fórmula.

El signo Σ corresponde a la letra mayúscula sigma, del alfabeto griego. Es equivalente a la letra S, de nuestro alfabeto.

Se denomina sumatoria de una sucesión a_n , a la forma abreviada de escribir sus términos expresados como sumandos:
Se denota:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n = \sum_{k=1}^n a_k ;$$

Ejemplos:

$$1+2+3+\dots+n = \sum_{k=1}^n k$$

$$1^2+2^2+3^2+\dots+n^2 = \sum_{k=1}^n k^2$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} + \dots + \frac{20}{21} = \sum_{k=1}^{20} \frac{k}{k+1}$$

Propiedades de las sumatorias:

1) Sumatoria de una constante:

Si $c_1=c_2=c_3=\dots=c_n=c$, constante, entonces:

$$\sum_{k=1}^n c_k = n \cdot c$$

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^{50} 4 = 4 + 4 + 4 + \dots + 4 = 50 \cdot 4 = 200$$

50 veces

2) Sumatoria del producto de una constante por los términos de una sucesión:

Si c es una constante, entonces:

$$\sum_{k=1}^n c \cdot a_k = c \cdot \sum_{k=1}^n a_k$$

La notación $\sum_{k=1}^n a_k$ se lee:
"sumatoria de los
términos de la forma, a
sub k , donde k varía de 1
a n ."

Ejemplo:

$$\sum_{k=1}^5 3(k^2 + 1) = 3 \cdot \sum_{k=1}^5 (k^2 + 1) = 3 \cdot (2 + 5 + 10 + 17 + 26) = 3 \cdot 60 = 180$$

3) Sumatoria de una suma o resta de términos de dos o más sucesiones:

Si a_k y b_k son sucesiones, entonces se cumple que:

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k$$

Ejemplo:
$$\sum_{k=1}^6 (k^2 - 3k + 2) = \sum_{k=1}^6 k^2 - 3 \cdot \sum_{k=1}^6 k + \sum_{k=1}^6 2$$

A veces es posible encontrar una fórmula o expresión general para la sumatoria de los términos de una sucesión, lo que simplifica notablemente el cálculo de dicha sumatoria.

1) Sumatoria de los n primeros números naturales:

Sea $A_n = 1, 2, 3, 4, 5, \dots, n-1, n$

$$\sum_{k=1}^n k = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + (n-1) + n \quad , \text{ o bien}$$

$$\sum_{k=1}^n k = n + (n-1) + (n-2) + \dots + 3 + 2 + 1$$

Sumando término a término, tenemos:

$$2 \sum_{k=1}^n k = \underbrace{(n+1) + (n+1) + (n+1) + \dots + (n+1)}_{n \text{ veces}}$$

n veces

$$2 \sum_{k=1}^n k = n(n+1) \quad , \text{ luego } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$$

2) Sumatoria de los n primeros números impares:

Sea $A_n = 1, 3, 5, 7, \dots, (2n-1)$

$$1+3+5+\dots+(2n-1) = \sum_{k=1}^n (2k-1)$$

Aplicando propiedades de la sumatoria, tenemos:

$$\sum_{k=1}^n (2k-1) = n^2$$

Sumatorias notables

➤ Suma de los "n" Primeros Números Naturales:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

➤ Suma de los "n" Primeros Números Pares Naturales:

$$\sum_{i=1}^{i=n} 2i = 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1)$$

➤ Suma de los "n" Primeros Números Impares Naturales:

$$\sum_{i=1}^{i=n} (2i-1) = 1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1) = n^2$$

➤ Suma de los "n" Primeros Números Cuadrados Perfectos:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

➤ Suma de los "n" Primeros Números Cubos Perfectos:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

➤ Suma de los "n" Primeros Productos Consecutivos tomados de 2 en 2:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+1) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + 4.5 + \dots + n(n+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

➤ Suma de los "n" Primeros Productos Consecutivos tomados de 3 en 3:

$$\sum_{i=1}^{i=n} i(i+1)(i+2) = 1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \dots + n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Ejemplos resueltos:

$$1) \sum_{k=1}^4 2k = 2 \sum_{k=1}^4 k = 2 \left(\frac{4 \cdot 5}{2} \right) = 20$$

$$2) \sum_{k=1}^{50} 3k - 2 = 3 \sum_{k=1}^{50} k - 2 \cdot 50 = 3 \left(\frac{50 \cdot 51}{2} \right) - 100 = 3.725$$

$$3) \sum_{k=1}^{30} 8 = 8 \cdot 30 = 240$$

$$4) \sum_{k=1}^{25} k^2 = \frac{25(25+1)(2 \cdot 25 + 1)}{6} = \frac{25 \cdot 26 \cdot 51}{6} = 5.525$$

$$5) \sum_{k=1}^{30} (k+1)^2 = \sum_{k=1}^{30} k^2 + 2 \sum_{k=1}^{30} k + \sum_{k=1}^{30} 1 = \frac{30 \cdot 31 \cdot 61}{6} + 2 \left(\frac{30 \cdot 31}{2} \right) + 1 \cdot 30 = 9.950$$

$$6) \sum_{k=1}^{40} k^3 = \left[\frac{40 \cdot (40+1)}{2} \right]^2 = \left[\frac{40 \cdot 41}{2} \right]^2 = 672.400$$

Ejercicios

Calcula las siguientes sumatorias: (reemplace $k=1$ y calcule el valor de ese término que corresponde al primero, luego $k=2$ y calcule el valor de ese término que corresponde al segundo, así sucesivamente hasta que k sea igual al valor que hay arriba de Σ que corresponde al último término de la sumatoria, en este ítem no es necesario utilizar las sumatorias notables).

$$1) \sum_{k=1}^7 \frac{k(k+1)}{2} =$$

$$2) \sum_{k=1}^8 (3k - 2) =$$

$$3) \sum_{k=1}^6 \frac{k}{(k+1)^2} =$$

$$4) \sum_{k=1}^{10} \frac{k-1}{k+1} =$$

$$5) \sum_{k=1}^4 \frac{(-1)^k}{2^k + 1} =$$

$$6) \sum_{k=1}^8 \frac{(-1)^k (k^2 + 1)}{4k} =$$

Expresa como sumatoria, las siguientes sumas:

i) $1^2 + 2^3 + 3^4 + \dots + 50^{51}$

ii) $1 \cdot 1 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 5 + \dots + 10 \cdot 19$

iii) $2 + 5 + 8 + 11 + \dots + 44$

iv) $1 + 4 + 7 + \dots + 43$

v) $2 + 5 + 10 + 17 + \dots + 401$

vi) $5 + 8 + 13 + 20 + \dots + 904$