



Colegio Valentín Letelier
Asignatura Matemáticas
Profesora Paloma Caballero

Guía de Aprendizaje 4

Unidad: 1 Subsector: Algebra Nivel: Cuarto Medio A

Objetivo de aprendizaje: AE 3 Determinar la función inversa de una función dada.

Objetivo de la Guía: Comprender inversa de una función

Nombre: _____ Curso: Cuarto medio A Fecha:

Instrucciones: (Leídas en silencio)

- ✓ Lee atentamente esta guía.
- ✓ Trabaja en forma individual.
- ✓ Pégala en tu cuaderno o archívala en tu carpeta.

FUNCIÓN INVERSA

Antonio estaba revisando noticias en Internet y se distrajo con el informe del tiempo. El pronóstico para ese día, en la ciudad de Nueva York, era de 91 °F, la temperatura máxima y 68 °F, la temperatura mínima.

- Si la función que relaciona las escalas Celsius (°C) y Fahrenheit (°F) está dada por la expresión $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$, donde x es la temperatura en grados Celsius y $f(x)$, en grados Fahrenheit, ¿cuáles son las temperaturas mínima y máxima pronosticadas, en grados Celsius?
- Las personas que viven en Nueva York, ¿deberán usar ropa abrigada ese día, ¿por qué?
- ¿En qué países se utiliza la escala Fahrenheit de temperatura? Averigua.
- ¿Qué otras escalas de temperaturas conoces? Nómbralas.

En la situación inicial observaste que si tenemos una función $y = f(x)$ a veces necesitamos calcular el valor de la variable independiente x , la cual tenemos que despejar; por ejemplo, la temperatura de ebullición del agua a nivel del mar corresponde a 212 °F. Si quisiéramos transformar esta medida a grados Celsius, podemos escribir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32$$

Luego, despejamos la x , es decir:

$$212 = \frac{9}{5}x + 32 \quad \bullet \text{ Restamos } 32.$$

$$180 = \frac{9}{5}x \quad \bullet \text{ Multiplicamos por } \frac{5}{9}.$$

$$100 = x$$

Por lo tanto, el agua ebulle a 100 °C.

Podemos generalizar lo anterior considerando una función que relacione la temperatura en grados Celsius en función de la temperatura en grados Fahrenheit. Para esto debemos expresar x en función de y (o $f(x)$), es decir, despejaremos la variable x de la expresión original:

$$y = \frac{9}{5}x + 32 \quad \bullet \text{ Restamos } 32.$$

$$y - 32 = \frac{9}{5}x \quad \bullet \text{ Multiplicamos por } 5.$$

$$5(y - 32) = 9x \quad \bullet \text{ Dividimos por } 9.$$

$$\frac{5}{9}(y - 32) = x$$

Atención

Con frecuencia se representa la inversa de una función f mediante f^{-1} , esta notación no debe confundirse con un exponente. Es decir, $f^{-1}(x) \neq [f(x)]^{-1}$ pues $[f(x)]^{-1} = \frac{1}{f(x)}$

La expresión obtenida en el procedimiento anterior se conoce como la función inversa de f y se escribe como f^{-1} . En este caso:

$$f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si te fijas, escribimos la expresión anterior en términos de x . Luego, tenemos, por ejemplo, que:

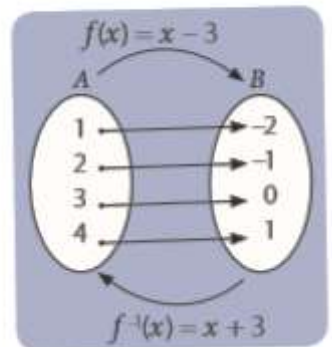
$$f^{-1}(212) = \frac{5}{9}(212 - 32) = \frac{5}{9}(180) = 100$$

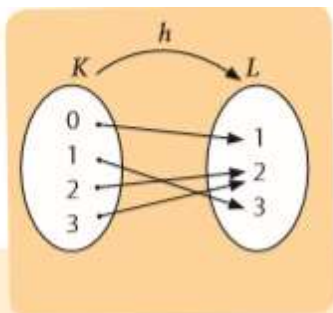
El resultado anterior es igual al que obtuvimos en la página anterior, es decir, que 212 °F equivalen a 100 °C.

En el diagrama sagital de la derecha se representa una función f y su inversa f^{-1} . Si te fijas, el dominio de f equivale al recorrido de f^{-1} y el recorrido de f es el dominio de f^{-1} .

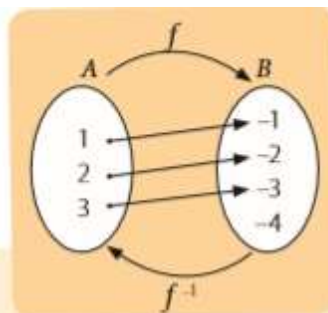
Además, para que f^{-1} sea función, a cada elemento de B le corresponde una única preimagen, de manera que f debe ser una función biyectiva.

Por lo tanto, no todas las funciones tienen una inversa, es decir, solo tienen inversa aquellas funciones que son biyectivas. Observa:





En el diagrama anterior h no es inyectiva ya que $h(2) = h(3) = 2$. Luego, h^{-1} no es función pues un elemento de su dominio tiene dos imágenes (2 y 3).



En el diagrama anterior f no es sobreyectiva ya que el -4 no tiene preimagen. Luego, f^{-1} no es función pues no todos los elementos de su dominio tienen una imagen.

Por otra parte, si calculamos la composición $(f \circ f^{-1})(x)$, o bien, $(f^{-1} \circ f)(x)$, obtendremos la función lineal $f(x) = x$, de esta manera podemos determinar si cierta función es la inversa de otra; por ejemplo, más arriba concluimos que:

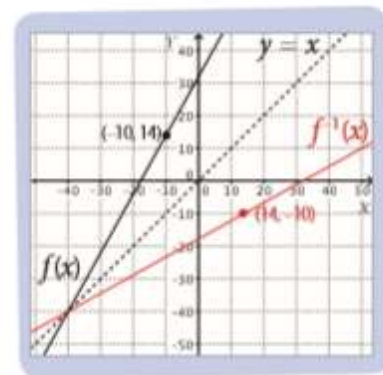
$$f(x) = \frac{9}{5}x + 32 \quad f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$$

Si calculamos $(f \circ f^{-1})(x)$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x)) = \frac{9}{5}\left(\frac{5}{9}(x - 32)\right) + 32 = \frac{45}{45}(x - 32) + 32 = x - 32 + 32 = x$$

Como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, la función $f^{-1}(x) = \frac{5}{9}(x - 32)$ es la inversa de $f(x) = \frac{9}{5}x + 32$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1} . Si te fijas, las gráficas son simétricas respecto de la recta $y = x$ (representada con las líneas punteadas). Esto ocurre para todas las funciones y sus inversas. En otras palabras, si f es una función biyectiva y f^{-1} es su función inversa, entonces las gráficas de f y f^{-1} son simétricas respecto de la gráfica de la función $f(x) = x$.



¿Lo entiendes?

Determina $(f^{-1} \circ f)(x)$ y verifica que f^{-1} es la inversa de f .

Puede ver el link : https://www.youtube.com/watch?v=bdBX4_3WRWc para ver un video explicativo de como obtener la inversa de una función

¿Cómo hacerlo?

Determina la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$. Luego, traza la gráfica de f y f^{-1} .

Como la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es una función afín, entonces es biyectiva, por lo tanto, tiene inversa. Luego, como $(f \circ f^{-1})(x) = x$, tenemos:

$$(f \circ f^{-1})(x) = (f(f^{-1}(x))) = \frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x$$

Ahora despejamos $f^{-1}(x)$. Observa.

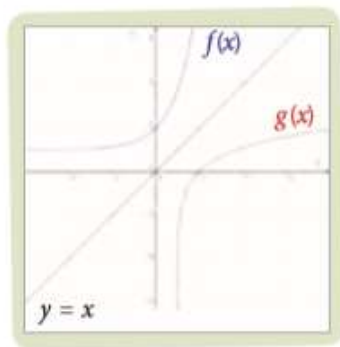
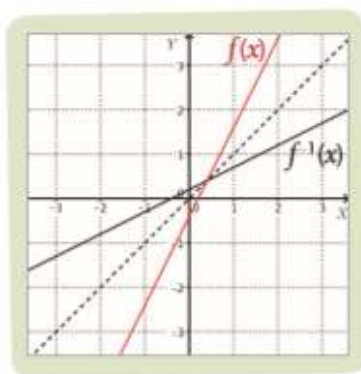
$$\frac{1}{2}f^{-1}(x) + \frac{1}{5} = x \quad \bullet \text{ Restamos } \frac{1}{5}.$$

$$\frac{1}{2}f^{-1}(x) = x - \frac{1}{5} \quad \bullet \text{ Multiplicamos por 2.}$$

$$f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$$

Luego, la inversa de la función $f(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}$ es $f^{-1}(x) = 2x - \frac{2}{5}$.

En la figura de la derecha se muestran las gráficas de f y f^{-1} . Si te fijas, las gráficas de ambas funciones son simétricas respecto de la recta $y = x$.



¿Cómo hacerlo?

Construye la gráfica de las funciones $f(x) = e^x + 1$ y $g(x) = \ln(x - 1)$. Luego, verifica que g es la inversa de f .

En la figura de la izquierda se muestran las gráficas de las funciones f y g . Al parecer las gráficas son simétricas respecto de la recta $f(x) = x$, de modo que podemos suponer que g es la inversa de f .

Para verificar lo anterior podemos calcular $(g \circ f)(x)$. Observa:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \ln(e^x + 1 - 1) = \ln(e^x) = x$$

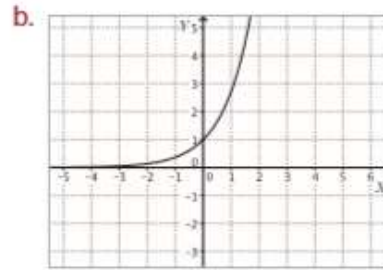
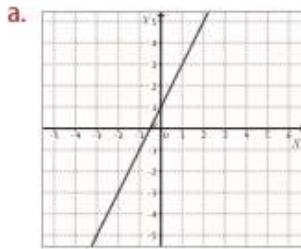
Luego, como $(g \circ f)(x) = x$, la función g es la inversa de f .

Tomo nota

- Dada una función $f: A \rightarrow B$ biyectiva, llamamos función inversa de f a la función $f^{-1}: B \rightarrow A$, tal que para cualquier x del dominio de f se cumple que: Si $f(x) = b$, entonces $f^{-1}(b) = x$.
- Dada una función $f(x)$, para determinar la representación algebraica de $f^{-1}(x)$, su función inversa, se escribe la ecuación $(f \circ f^{-1})(x) = x$, aplicando $f(x)$ a la expresión $f^{-1}(x)$, y luego se resuelve la ecuación, considerando a $f^{-1}(x)$ como la incógnita.
- En un mismo gráfico, las gráficas de $f(x)$ y $f^{-1}(x)$ son simétricas respecto de la recta $y = x$.

Actividades

1. Traza la gráfica de f^{-1} a partir de la gráfica de f .



2. Responde las siguientes preguntas.

- ¿Qué condición debe cumplir una función para tener una función inversa?
- Si f es creciente, ¿es f^{-1} una función creciente?

3. Determina si las siguientes funciones, definidas en los números reales, tienen inversa. En el caso de que la tengan, determina f^{-1} .

- $f(x) = 3x + 4$
- $f(x) = 2x^3 - 1$
- $f(x) = x^2 - 4$
- $f(x) = \log(x - 5)$
- $f(x) = 1 - e^x$
- $f(x) = x^6 - 4$

4. **CONEXIÓN CON LA ECONOMÍA** ▶ El precio de un automóvil está dado por la función $p(t) = 30\,000\,000 - 2\,000\,000t$, donde p corresponde al precio del automóvil en el año t .

- Demuestra que p es una función biyectiva.
- Halla p^{-1} y determina su significado.

5. Al colocar un objeto en el platillo de una balanza analógica, el puntero describe un arco de medida, en grados, directamente proporcional a la masa del cuerpo. Para 1 kg el puntero describe un arco de 36° .

- Escribe una función que exprese el desplazamiento del puntero en función de la masa corporal x de un objeto, con $x < 10$.
- Escribe una función que exprese la masa, en kilogramos, de un objeto colocado en la balanza, en función del desplazamiento x del puntero, con $x < 360^\circ$.
- ¿Cuál es la relación entre las funciones obtenidas en los puntos anteriores?

6. **CONEXIÓN CON LA FÍSICA** ▶ La ley de enfriamiento de Newton permite determinar el momento de la muerte de una persona con la función $T(t) = T_0 + (T_1 - T_0)(0,97)^t$, donde T es la temperatura del individuo t horas después de su muerte. T_0 es la temperatura ambiente y T_1 la temperatura en el momento de su muerte.

- Halla T^{-1} y explica su significado.
- Si $T_0 = 25^\circ\text{C}$, $T_1 = 37^\circ\text{C}$ y $T = 31^\circ\text{C}$, ¿cuánto tiempo ha pasado desde que murió la persona?

Desafío

Dada la función $f(x) = mx + n$, ¿cuál es el valor de $m \cdot p$, si p es la pendiente de la recta asociada a f^{-1} ?